PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE VALPARAÍSO
Algebra Lineal

Pauta de Corrección
Espacios Vectoriales

1.a) Falso
Ya que no cumple con la primera condición: el neutro aditivo de $M_2(IR) \notin U$

b)Verdadero.
I. el polinomio nulo pertenece a W

II. Por demostrar que para todo $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$
Sean $u = ax^2 + bx + c \in W \Rightarrow a + b + c = 0$
y $v = a'x^2 + b'x + c' \in W \Rightarrow a' + b' + c' = 0$

$$u + v = ax^2 + bx + c + a'x^2 + b'x + c'$$
$$= (a + a')x^2 + (b + b')x + c + c'$$

si $x = 1, a + a' + b + b' + c + c' = a + b + c + a' + b' + c' = 0$
Por lo tanto $u + v \in W$

III.Por demostrar que para todo $u \in W$ y $\beta \in IR$, entonces $\beta u \in W$
Sea $u = ax^2 + bx + c \in U \Rightarrow a + b + c = 0$
y $\beta \in IR$

$\beta u = \beta(ax^2 + bx + c) = \beta ax^2 + \beta bx + \beta c$, si x=1, entonces,
$\beta a + \beta b + \beta c = \beta(a + b + c) = \beta \bullet 0 = 0$

Por lo tanto $\beta u \in W$

De I, II y III $W \leq IR_2[x]$

c)Verdadero

Primero, ver si el conjunto es l.i.
Sean $\beta, \gamma, \delta \in IR$, tales que
$$(0,0,0) = \beta(a,1,1) + \gamma(0,a,3) + \delta(0,0,a+1)$$
$$= (\beta a, \beta + \gamma a, \beta + 3\gamma + \delta a + \delta)$$

Luego, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$0 = \beta a$$
$$0 = \beta + \gamma a$$
$$0 = \beta + 3\gamma + \delta a + \delta$$

y obtenemos la *matriz* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 3 & a+1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es: $a^2(a+1)$

y necesitamos que $a^2(a+1) \neq 0 \ \therefore \ a \neq 0 \wedge a \neq -1$

Las mismas condiciones serán para ver si el conjunto es generador

d)Verdadero

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ generará a $M_2(IR)$ si existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in IR$ tal que

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

de lo cual obtenemos el siguiente sistema

$\alpha + \beta = x$

$\alpha + 2\beta + \gamma - 3\delta = y$

$\alpha + 3\beta - 2\delta = z$

$\alpha + \delta = w$

luego, la matriz asociada al sistema es

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es: 3

Por lo tanto, el sistema tiene única solución y existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in IR$ tal que

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Luego $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera a $M_2(IR)$

e) Verdadero

Deben existir $\alpha, \beta, \gamma \in IR$ tal que

$3x = \alpha(x - x^2) + \beta(1 + x) + \gamma(2x^2 + 1)$

$3x = \alpha x - \alpha x^2 + \beta + \beta x + 2\gamma x^2 + \gamma$

$3x = (-a + 2\gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta + \gamma$

y obtenemos el siguiente sistema

$-\alpha + 2\gamma = 0$

$\alpha + \beta = 3$

$\beta + \gamma = 0$

Del que obtenemos que $\alpha = 6, \beta = -3, \gamma = 3$

Por lo tanto $3x \in \langle x - x^2, 1 + x, 2x^2 + 1 \rangle$

3) Sea $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Luego,

$p''(1) = 12a + 6b + 2c$

$p'(1) = 4a + 3b + 2c + d$

$p'(-1) = -4a + 3b - 2c + d$

$p(-1) = a - b + c - d + e$

Por lo tanto,

$D = \{p(x) \in IR^4[x] / 12a + 6b + 2c = 4a + 3b + 2c + d \wedge -4a + 3b - 2c + d = a - b + c - d +$

$D = \{p(x) \in IR^4[x] / 8a + 3b - d = 0 \wedge -5a + 4b - 3c + 2d - e = 0\}$

Luego, (notemos que a, b y c no tienen restricciones)

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = ax^4 + bx^3 + cx^2 + (8a + 3b)x + (-5a + 4b - 3c + 2d)$

$= a(x^4 + 8x - 5) + b(x^3 + 3x) + c(x^2 - 3) + 2d$

primero, necesitamos encontrar un conjunto generador, para ello consideramos la matriz del sistema y la escalonada reducida por fila(recordar que es un sistema homogéneo)

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{47} & -\frac{10}{47} & \frac{3}{47} \\ 0 & 1 & -\frac{24}{47} & \frac{11}{47} & -\frac{8}{47} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$a = -\frac{9}{47}c + \frac{10}{47}d - \frac{3}{47}e$

$b = \frac{24}{47}c - \frac{11}{47}d + \frac{8}{47}e$

Luego:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \left(-\frac{9}{47}c + \frac{10}{47}d - \frac{3}{47}e\right)x^4 + \left(\frac{24}{47}c - \frac{11}{47}d + \frac{8}{47}e\right)x^3 + cx^2 + dx + e$$

$$= c\left(-\frac{9}{47}x^4 + \frac{24}{47}x^3 + x^2\right) + d\left(\frac{10}{47}x^4 - \frac{11}{47}x^3 + x\right) + e\left(-\frac{3}{47}x^4 + \frac{8}{47}x^3 + 1\right)$$

Por lo tanto, un conjunto generador del conjunto D es

$$\left\{-\frac{9}{47}x^4 + \frac{24}{47}x^3 + x^2, \frac{10}{47}x^4 - \frac{11}{47}x^3 + x, -\frac{3}{47}x^4 + \frac{8}{47}x^3 + 1\right\}$$

Además, este conjunto es linealmente independiente

$$\beta\left(-\frac{9}{47}x^4 + \frac{24}{47}x^3 + x^2\right) + \gamma\left(\frac{10}{47}x^4 - \frac{11}{47}x^3 + x\right) + \delta\left(-\frac{3}{47}x^4 + \frac{8}{47}x^3 + 1\right) = 0$$
$$\left(-\frac{9}{47}\beta + \frac{10}{47}\gamma - \frac{3}{47}\delta\right)x^4 + \left(\frac{24}{47}\beta - \frac{11}{47}\gamma + \frac{8}{47}\delta\right)x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

Recordar que es una igualda polinomial, por lo tanto

$\beta = 0, \gamma = 0$ y $\delta = 0$

es decir, $\left\{-\frac{9}{47}x^4 + \frac{24}{47}x^3 + x^2, \frac{10}{47}x^4 - \frac{11}{47}x^3 + x, -\frac{3}{47}x^4 + \frac{8}{47}x^3 + 1\right\}$ es linealmente independiente.

Así, $\left\{-\frac{9}{47}x^4 + \frac{24}{47}x^3 + x^2, \frac{10}{47}x^4 - \frac{11}{47}x^3 + x, -\frac{3}{47}x^4 + \frac{8}{47}x^3 + 1\right\}$ es una base de V.

4) Dado que B es base de V, entonces es l.i., luego:

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0 \quad (\bigstar)$

Ahora,

$\alpha_1(v_1+v_2-v_3)+\alpha_2(v_1-v_2)+\alpha_3(v_2+v_3) = 0$

$\Rightarrow\ \alpha_1v_1+\alpha_1v_2-\alpha_1v_3+\alpha_2v_1-\alpha_2v_2+\alpha_3v_2+\alpha_3v_3 = 0$

$\Rightarrow\ (\alpha_1+\alpha_2)v_1+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)v_2+(-\alpha_1+\alpha_3)v_3 = 0 \Rightarrow (\bigstar)$

$\alpha_1+\alpha_2 = 0$

$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 = 0$

$-\alpha_1+\alpha_3 = 0$

La matriz asociada es

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$cuyo determinante es: -3

Por lo tanto, podemos concluir que B´ es base de B, ya el determinante obtenido es no nulo, y el número de elementos de B´ coincide con la dimensión de B que es igual a 3.

5) **a)**Primero determinamos un conjunto generador del subespacio U

$U = \{(x,y,z,w) \in IR^4 / x-y+z = 0\}$

$U = \{(x,y,z,w) \in IR^4 / x = y-z\}$

$U = \{(y-z,y,z,w) \in IR^4 / y,z,w \in IR\}$

$= \{y(1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+w(0,0,0,1) \in IR^4 / y,z,w \in IR\}$

$U = \langle(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$

Ahora, realizar el mismo proces con W

$W = \{(x,y,z,w) \in IR^4 / x = y \wedge w = 0\}$

$W = \{(x,x,z,o) \in IR^4 / x,y \in IR\}$

$W = \{x(1,1,0,0)+z(0,0,1,0) \in IR^4 / x,y \in IR\}$

$W = \langle(1,1,0,0),(0,0,1,0)\rangle$

Luego $U+W = \langle(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0)\rangle$

Es linealmente independiente ya que

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$=-1$\neq 0$

entonces

$\{(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0)\}$ es una base de IR^4, luego

$U+W = \langle(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0)\rangle = IR^4$

y su dimensión es 4

6) **a)Una base para U**

$U = \{(x,y,z) \in IR^3 / 3x+2y-z = 0\}$

$U = \{(x,y,z) \in IR^3 / z = 3x+2y\}$
$U = \{(x,y,3x+2y) \in IR^3 / x,y \in IR\}$
$U = \langle (1,0,3),(0,1,2) \rangle$
por ver si es l.i.
$a(1,0,3)+b(0,1,2) = 0$
$a = 0$
$b = 0$
$3a+2b = 0$
Por lo tanto es l.i. y el conjunto $\{(1,0,3),(0,1,2)\}$ es una base de U y su dimensión es 2

b) Sea $(x,y,z) \in U \cap W$, luego $(x,y,z) \in U$ y $(x,y,z) \in W$
Así tenemos
$3x+2y-z = 0$ y $(x,y,z) = a(1,2,1)$ con a $\in IR$

$(x,y,z) = (a,2a,a)$
Luego, $x = a, y = 2a, z = a$
Reemplazando en la ecuación que define la pertenencia a U se tiene:
$3a+4a-a = 0$
$6a = 0$
$a = 0$
Y así tenemos $(x,y,z) = a(1,2,1)$
$= (0,0,0)$
$(x,y,z) \in U \cap W \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$
es decir, $U \cap W = \langle (0,0,0) \rangle$

Como un conjunto generador de U es U= $\langle (1,0,3),(0,1,2) \rangle$ y W= $\langle (1,2,1) \rangle$
entonces $U+W = \langle (1,0,3),(0,1,2),(1,2,1) \rangle$
y el conjunto $\{(1,0,3),(0,1,2),(1,2,1)\}$ es l.i. y a que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} -6 \neq 0$$

Con lo cual tenemos que $IR^3 = U \oplus W$

7)
$P = \{ax^2+bx+c \in IR_2[x] / b-a+c = 0\}$ y $Q = \langle x+1 \rangle$
Sea $ax^2+bx+c \in P \cap Q \Rightarrow ax^2+bx+c \in P$ y $ax^2+bx+c \in Q$
luego, $ax^2+bx+c = \beta(x+1)$, con $\beta \in IR$
$ax^2+bx+c = \beta x+\beta$
Por lo tanto, $a = 0$, $b = \beta$ y $c = \beta$, $\beta \in IR$

Reemplazando en la ecuación que define la pertenencia a P

$-\beta-\beta = 0 \Leftrightarrow -2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$
y asi tenemos, $ax^2+bx+c = 0(x+1) = 0$
Finalmente $ax^2+bx+c \in P \cap Q \Leftrightarrow ax^2+bx+c = 0$
es decir $P \cap Q = \langle 0 \rangle$

Ahora, buscamos un conjunto generador de P, para ello

$$b - a + c = 0$$
$$b = a - c$$

Por lo tanto $ax^2 + bx + c = ax^2 + (a - c)x + c$
$= ax^2 + ax - cx + c$
$= a(x^2 + x) + c(1 - x)$

Luego, $P = \langle (x^2 + x), (1 - x) \rangle$

Por lo tanto $P + Q = \langle x^2 + x, 1 - x, x + 1 \rangle$

Luego $0 = \alpha_1(x^2 + x) + b_2(1 - x) + c_2(x + 1)$
$0 = a_1x^2 + (a_1 - b_2 + c_2)x + b_2 + c_2$
$a_1 = 0$
$a_1 - b_2 + c_2 = 0$
$b_2 + c_2 = 0$

$\therefore \; a_1 = 0, c_2 = 0, \quad b_2 = 0$

Por lo tanto $\langle x^2 + x, 1 - x, x + 1 \rangle$ es una base de $IR_2[x]$
y hemos probado que $P \oplus Q = IR_2[x]$